

第4章 | 微分法の応用



第1節 導関数の応用

1 接線の方程式

まとめ

1 接線の傾き

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きに等しい。

2 接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

3 法線

曲線上の点 A を通り、A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を、点 A におけるこの曲線の法線 という。

4 法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における法線の方程式は

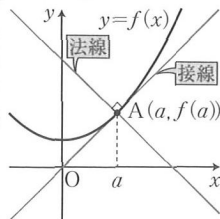
$$f'(a) \neq 0 \text{ のとき } y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

補足 $f'(a)=0$ のとき、法線の方程式は $x=a$

注意 点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しい。

$f'(a) \neq 0$ のとき、法線の傾きを m とすると、垂直条件から

$$f'(a) \cdot m = -1 \quad \text{よって} \quad m = -\frac{1}{f'(a)}$$

A 曲線 $y=f(x)$ の接線

教 p.102

練習
1

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

- (1) $y=\frac{4}{x}$, $A(-1, -4)$ (2) $y=\tan x$, $A(0, 0)$

指針 接線の方程式 接点 A の座標が与えられている。曲線の式を $y=f(x)$ として導関数 $f'(x)$ を求め、接線の方程式の公式を利用する。

解答 (1) $f(x)=\frac{4}{x}$ とすると

$$f'(x)=-\frac{4}{x^2}$$

であるから $f'(-1)=-4$

よって、点 $A(-1, -4)$ における接線の方程式は

$$y-(-4)=-4\{x-(-1)\}$$

すなわち $y=-4x-8$ 答

(2) $f(x)=\tan x$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

であるから $f'(0)=\frac{1}{(\cos 0)^2}=1$

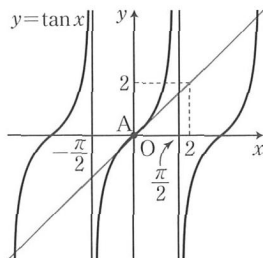
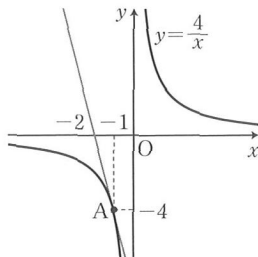
よって、点 $A(0, 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=1 \cdot (x-0)$$

すなわち $y=x$ 答

注意 点 (x_1, y_1) を通り傾きが m の直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1)$$



4章

微分法の応用

B 曲線 $y=f(x)$ の法線

教 p.103

練習 2

次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ。

(1) $y=\frac{2}{x}$, $A(1, 2)$ (2) $y=\sin x$, $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

指針 法線の方程式 曲線の式を $y=f(x)$ として、まず導関数 $f'(x)$ を求める。点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であり、 $f'(a) \neq 0$ のとき、法線の傾きは $-\frac{1}{f'(a)}$ となる。

法線の方程式は $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

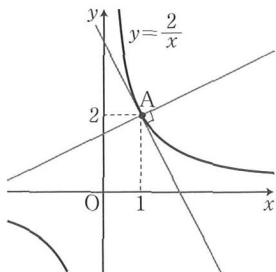
解答 (1) $f(x)=\frac{2}{x}$ とすると $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$

よって $f'(1)=-2$

したがって、求める法線の方程式は

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$$

すなわち $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 答



(2) $f(x) = \sin x$ とすると

$$f'(x) = \cos x$$

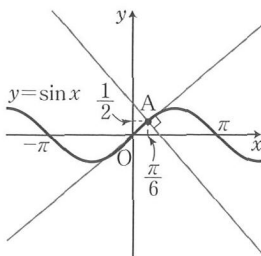
$$\text{よって } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって、求める法線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

すなわち

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \quad \text{図}$$



C 傾きや通る 1 点から接線の方程式を決定

教 p.104

練習
3曲線 $y = e^x$ について、次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 1 である

(2) 点 (1, 0) を通る

指針 接線の方程式 接点の座標ではなく、他の条件が与えられている。接点は曲線 $y = e^x$ 上にあるから、その座標を (a, e^a) として、この点における接線の方程式を公式に従って作る。条件を満たすように a の値を定め、あらためて方程式に代入する。**解答** $y = e^x$ を微分すると $y' = e^x$ ここで、接点の座標を (a, e^a) とすると、

接線の方程式は

$$y - e^a = e^a(x - a) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1) 接線 ① の傾きが 1 であるから

$$e^a = 1 \quad \text{すなわち} \quad a = 0$$

① に代入すると

$$y - e^0 = e^0(x - 0)$$

整理して $y = x + 1$ 図

(2) 接線 ① が点 (1, 0) を通るから

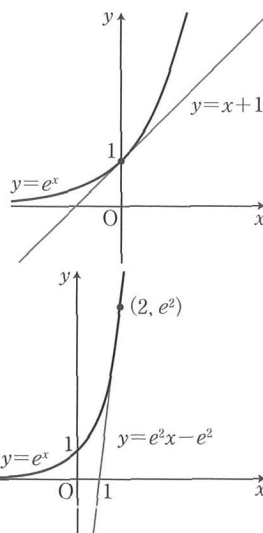
$$0 - e^a = e^a(1 - a)$$

$$\text{よって } e^a(2 - a) = 0$$

$$e^a > 0 \text{ であるから } a = 2$$

① に代入すると

$$y - e^2 = e^2(x - 2)$$

整理して $y = e^2x - e^2$ 図

D 曲線の方程式と接線

教 p.105

練習
4

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, $A(-1, 2)$

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$, $A(\sqrt{2}, -1)$

指針 曲線の方程式と接線 接点の座標が与えられている。接線の方程式を求める手順は練習 1 と同様で、

導関数 $\rightarrow$ 接点における微分係数 (傾き) $\rightarrow$ 公式への代入

ここでは、曲線が x, y の方程式で与えられているから、 y を x の関数とみて、方程式の両辺を x で微分して導関数 y' を求める。

解答 (1) 方程式の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{2} + \frac{2yy'}{8} = 0$$

$$\text{よって, } y \neq 0 \text{ のとき } y' = -\frac{4x}{y}$$

ゆえに、点 $A(-1, 2)$ における接線の傾きは

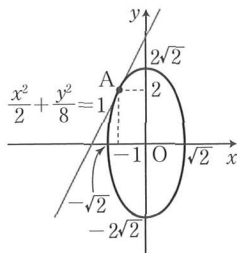
$$-\frac{4 \cdot (-1)}{2} = 2$$

したがって、求める接線の方程式は

$$y - 2 = 2\{x - (-1)\}$$

すなわち $y = 2x + 4$ 答

$$\begin{aligned} \leftarrow \frac{d}{dx} y^2 &= \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 2y \frac{dy}{dx} = 2yy' \end{aligned}$$



(2) 方程式の両辺を x で微分すると

$$2x - 2yy' = 0$$

$$\text{よって, } y \neq 0 \text{ のとき } y' = \frac{x}{y}$$

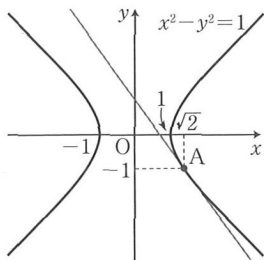
ゆえに、点 $A(\sqrt{2}, -1)$ における接線の傾きは

$$\frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

したがって、求める接線の方程式は

$$y - (-1) = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$$

すなわち $y = -\sqrt{2}x + 1$ 答

4
章

微分法の応用

2 平均値の定理

まとめ

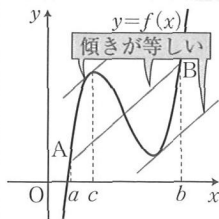
平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。

注意 条件を満たす関数 $y=f(x)$ のグラフ上に2点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ があるとき、グラフ上の A, B 間の点における接線で、直線 AB と平行なものが少なくとも1本存在する。連続で微分可能であることが欠かせない条件である。



A 平均値の定理

教 p.107

練習
5

次の場合に、上の平均値の定理における c の値を求めよ。

$$f(x)=x^3, \quad a=-1, \quad b=2$$

指針 平均値の定理 区間 $[a, b]$ で連続、区間 (a, b) で微分可能であることを確かめてから定理の等式を使う。両辺をそれぞれ計算し、右辺に残る未知数 c の値を求める。

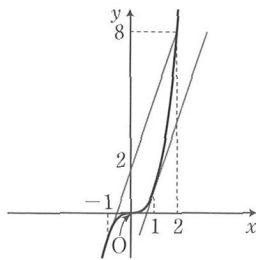
解答 $f(x)=x^3$ は、区間 $[-1, 2]$ で連続で、区間 $(-1, 2)$ で微分可能である。

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{2^3-(-1)^3}{3}=3$$

$$\text{また} \quad f'(c)=3c^2$$

$$\text{よって} \quad 3c^2=3$$

$$-1 < c < 2 \text{ であるから} \quad c=1 \quad \text{答}$$



B 不等式への応用

教 p.107

練習
6

平均値の定理を用いて、次のことを証明せよ。

$$a < b \text{ のとき} \quad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

指針 平均値の定理の応用 関数 $f(x)=e^x$ を考えると、不等式の中央の式は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ の形をしている。区間 } [a, b] \text{ で平均値の定理を用いる。}$$

解答 関数 $f(x)=e^x$ は、微分可能で $f'(x)=e^x$

区間 $[a, b]$ において、平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a < c < b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)=e^x$ は常に増加するから、 $\textcircled{2}$ より

$$e^a < e^c < e^b$$

よって、 $\textcircled{1}$ より $e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$ 終

3 関数の値の変化

まとめ

1 導関数の符号と関数の増減

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能であるとする。

① 区間 (a, b) で常に $f'(x) > 0$ ならば、

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で増加する。

② 区間 (a, b) で常に $f'(x) < 0$ ならば、

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で減少する。

③ 区間 (a, b) で常に $f'(x) = 0$ ならば、

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定数である。

注意 区間 I に含まれる任意の2数 x_1, x_2 について

「 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ 」が成り立つとき、関数 $f(x)$ は区間 I で増加するといひ、「 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ 」が成り立つとき、関数 $f(x)$ は区間 I で減少するという。

2 導関数が等しい2つの関数

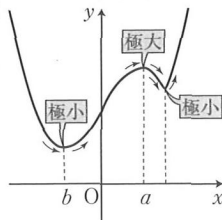
関数 $f(x), g(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能であるとする。

区間 (a, b) で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば、区間 $[a, b]$ で

$g(x) = f(x) + C$ ただし、 C は定数

3 極大と極小

連続な関数 $f(x)$ が、 $x=a$ を境目として、増加から減少に移るとき、 $f(x)$ は $x=a$ で 極大 であるといひ、 $f(a)$ を 極大値 といひ。関数 $f(x)$ が、 $x=b$ を境目として減少から増加に移るとき、 $f(x)$ は $x=b$ で 極小 であるといひ、 $f(b)$ を 極小値 といひ。極大値と極小値をまとめて 極値 といひ。



4 極値をとるための必要条件

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$

注意 $f'(a)=0$ であっても、 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとは限らない。関数 $f(x)$ の極値を求めるには、まず $f'(x)=0$ となる x の値を求め、その値の前後における $f'(x)$ の符号を調べる必要がある。

A 関数の増減

教 p.108

練習
7

教科書 108 ページの 2, 3 を証明せよ。

方針 関数の増減(証明) 平均値の定理を使って証明する。

2 区間 $[a, b]$ に含まれる任意の 2 数 x_1, x_2 について、
「 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ 」が成り立つことを示せばよい。

3 区間 $[a, b]$ に含まれる任意の 2 数 x_1, x_2 について、「 $f(x_1)=f(x_2)$ 」が成り立つことを示せばよい。

解答 区間 $[a, b]$ において、 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ となる任意の 2 数 x_1, x_2 に対して、平均値の定理により $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, $x_1 < c < x_2$ を満たす実数 c が存在する。

【2の証明】 区間 (a, b) で常に $f'(x) < 0$ ならば、 x_1, x_2 のとり方によらず、常に $f'(c) < 0$ となる。ここで、 $x_2 - x_1 > 0$ であるから $f(x_2) - f(x_1) < 0$ すなわち $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つ。
よって、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で減少する。 終

【3の証明】 区間 (a, b) で常に $f'(x) = 0$ ならば、 x_1, x_2 のとり方によらず、常に $f'(c) = 0$ となるから $f(x_2) - f(x_1) = 0$ すなわち、任意の x_1, x_2 について、 $f(x_1) = f(x_2)$ が成り立つ。
よって、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定数である。 終

教 p.109

練習
8

教科書 109 ページの上のことを証明せよ。

方針 導関数が等しい関数 教科書 p.109 の上のこととは次のことである。

区間 (a, b) で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば、区間 $[a, b]$ で $g(x) = f(x) + C$ ただし、 C は定数。

関数 $h(x) = g(x) - f(x)$ を考えて、教科書 p.108 の次のことを用いて証明する。

3 区間 (a, b) で常に $f'(x) = 0$ ならば、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定数である。

解答 $h(x) = g(x) - f(x)$ とすると、 $h(x)$ は区間 (a, b) で微分可能であり

$$h'(x) = g'(x) - f'(x)$$

仮定より、区間 (a, b) で常に $h'(x)=0$ となるから、 $h(x)$ は区間 $[a, b]$ で定数である。

よって $g(x)-f(x)=C$ ただし、 C は定数
すなわち、区間 $[a, b]$ で $g(x)=f(x)+C$ (C は定数) 図

教 p.109

練習
9

次の関数の増減を調べよ。

$$(1) f(x)=x-e^x$$

$$(2) f(x)=x-\log x$$

$$(3) f(x)=x+\sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

指針 関数の増減 まず、関数 $f(x)$ の定義域を確かめてから、導関数 $f'(x)$ と、 $f'(x)=0$ となる x の値を求める。さらに、 $f'(x)$ の符号を調べて、 $f'(x)$ が正の区間では $f(x)$ は増加する、負の区間では $f(x)$ は減少すると判断する。

解答 (1) 関数の定義域は実数全体である。

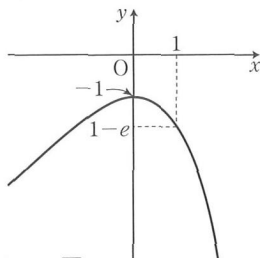
$$f'(x)=1-e^x$$

$$f'(x)=0 \text{ とすると } x=0$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	-1	↘

よって、 $f(x)$ は、 $x \leq 0$ で増加し、 $0 \leq x$ で減少する。 図



(2) 関数の定義域は $x > 0$ である。

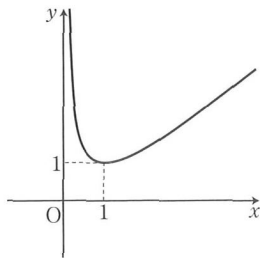
$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{ とすると } x=1$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0		1	
$f'(x)$	↘	-	0	+
$f(x)$	↘	↘	1	↗

よって、 $f(x)$ は、 $0 < x \leq 1$ で減少し、 $1 \leq x$ で増加する。 図



(3) 関数の定義域は $0 \leq x \leq \pi$ である。

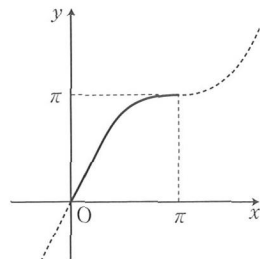
$$f'(x)=1+\cos x$$

$$f'(x)=0 \text{ とすると } x=\pi$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0		π
$f'(x)$	↗	+	↗
$f(x)$	0	↗	π

よって、 $f(x)$ は、 $0 \leq x \leq \pi$ で増加する。 図



B 関数の極大と極小

教 p.111

練習
10

次の関数の極値を求めよ。

$$(1) f(x) = x^2 e^{-x} \quad (2) f(x) = x \log x \quad (3) f(x) = x + \frac{2}{x}$$

指針 関数の極値 導関数 $f'(x)$, $f'(x)=0$ となる x の値を順に求め、増減表を作る。

$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わることを確かめてから極値とする。

$f'(x) > 0$ (増加) から $f'(x) < 0$ (減少) に移るとき極大値をとり、

$f'(x) < 0$ (減少) から $f'(x) > 0$ (増加) に移るとき極小値をとる。

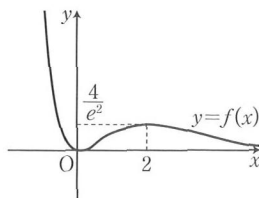
解答 (1) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$

← $e^{-x} > 0$

$f'(x)=0$ とすると $x=0, 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		0		2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{4}{e^2}$	↘



よって、 $f(x)$ は $x=0$ で極小値 0, $x=2$ で極大値 $\frac{4}{e^2}$ をとる。 答

(2) 関数の定義域は $x > 0$ である。

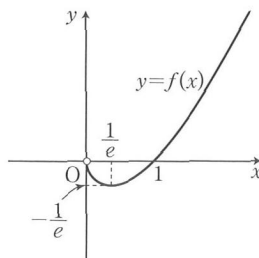
$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$\leftarrow f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{ とすると } x=\frac{1}{e}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{1}{e}$	
$f'(x)$	↗	-	0	+
$f(x)$	↗	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗



よって、 $f(x)$ は $x=\frac{1}{e}$ で極小値 $-\frac{1}{e}$ をとる。極大値はない。 答

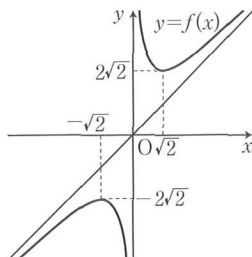
(3) 関数の定義域は $x \neq 0$ である。

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^2} \quad \leftarrow x^2 > 0$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \pm\sqrt{2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $-2\sqrt{2}$	↘	/	↘	極小 $2\sqrt{2}$	↗



よって、 $f(x)$ は

$x = -\sqrt{2}$ で極大値 $-2\sqrt{2}$ 、 $x = \sqrt{2}$ で極小値 $2\sqrt{2}$ をとる。 答

練習 11

教 p.112

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = |x|(x+1)$

(2) $f(x) = |x|\sqrt{x+2}$

指針 関数の極値 $x=a$ で微分可能でなくても、 $x=a$ で極値をとることがある。(1) は $x=0$ で、(2) は $x=-2$ 、 0 で微分可能ではない。

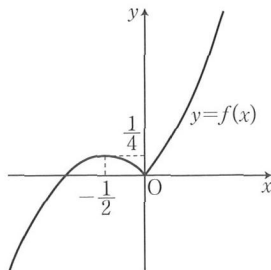
(1)、(2) とも定義域を分割して絶対値の記号をはずし、それぞれの区間で導関数の符号を調べて増減表を作る。極値かどうかの判断は、これまでと同様である。

解答 (1) $x \geq 0$ のとき $f(x) = x^2 + x$
 $x > 0$ において $f'(x) = 2x + 1 > 0$
 $x < 0$ のとき $f(x) = -x^2 - x$
 $x < 0$ において $f'(x) = -2x - 1$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -\frac{1}{2}$$

以上から、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		$-\frac{1}{2}$		0	
$f'(x)$	+	0	-	/	+
$f(x)$	↗	極大 $\frac{1}{4}$	↘	極小 0	↗



よって、 $f(x)$ は

$x = -\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{1}{4}$ 、 $x = 0$ で極小値 0 をとる。 答

(2) 関数の定義域は $x \geq -2$ である。

$x \geq 0$ のとき $f(x) = x\sqrt{x+2}$

$x > 0$ において

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

よって、 $x > 0$ では常に $f'(x) > 0$

$-2 \leq x < 0$ のとき $f'(x) = -x\sqrt{x+2}$

$-2 < x < 0$ において

$$f'(x) = -\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

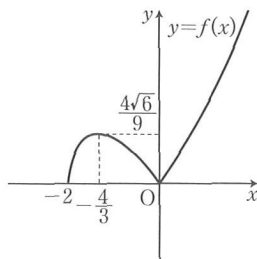
$f'(x) = 0$ となる x の値は $x = -\frac{4}{3}$

以上から、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-2		$-\frac{4}{3}$		0	
$f'(x)$		+	0	-		+
$f(x)$	0		極大 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$		極小 0	

よって、 $f(x)$ は

$x = -\frac{4}{3}$ で極大値 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 、 $x = 0$ で極小値 0 をとる。 答



極値の定義をしっかりと理解しよう。



練習 12

関数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように、定数 a の値を定めよ。

また、このとき、関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

指針 極値をとるための必要条件 関数 $f(x)$ が $x=1$ で極値をとるから ($x=1$ で微分可能であることを確かめて)、 $f'(1)=0$ である。この等式から a の値を求めることができる。ただし、ここまでは必要条件で進めてきたので、 a の値を代入した関数 $f(x)$ について、増減表を作り、 $x=1$ で極値をとることを確かめておく。

解答

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$$

$$\left\langle \left(\frac{a}{x} \right)' = -\frac{a}{x^2} \right\rangle$$

教 p.113

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから、

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるならば

$$f'(1)=0$$

すなわち $1-a=0$

これを解くと、 $a=1$ となる。

逆に、 $a=1$ のとき $f(x)$ が $x=1$ で極値をとることを示す。

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1, 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 -2	↘	/	↘	極小 2	↗

よって、 $a=1$ のとき、 $x=1$ で確かに極値をとる。

□ $a=1$,

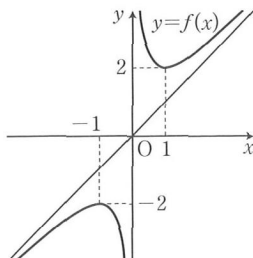
$x=-1$ で極大値 -2 ,

$x=1$ で極小値 2

← 必要条件

← $f'(1)=1-a$

← 定義域は $x \neq 0$



4 章

微分法の応用

十分条件の確認を
忘れないようにしましょう。



深める

教 p.113

教科書 113 ページの応用例題 3 の解答について、次の ①、② を説明してみよう。

① $f(x)$ が $x=-1$ で微分可能であることを確かめた理由

② $a=2$ のとき $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとることを確かめた理由

指針 極値をとるための必要条件 「 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$ 」は、関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なときに成り立つ。また、その逆は成り立たない。

解答 ① $f(x)$ が $x=-1$ で微分可能でなくても、 $x=-1$ で極値をとる場合があり、その場合には

$x=-1$ で極値をとるならば、 $f'(-1)=0$ である

とはいえないから。 □

② $f'(-1)=0$ であっても $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるとは限らないから。 □

C 関数の最大と最小

教 p.114

練習
13

次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

(1) $y = (1 + \cos x) \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(2) $y = \frac{4-3x}{x^2+1} \quad (1 \leq x \leq 4)$

指針 関数の最大と最小 閉区間 $[a, b]$ で関数 $f(x)$ の最大値, 最小値を求めるには, $f(x)$ の極大, 極小を調べ, 極値と両端の値 $f(a), f(b)$ を比較して判断する。区間の両端を含めて増減表を作る。

解答 (1) $y' = -\sin x \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cdot \cos x$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$\leftarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$$

 $0 < x < 2\pi$ において $y' = 0$ となる x の値を求めると

$$\cos x = -1 \quad \text{または} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\leftarrow \cos x = -1 \text{ から} \\ x = \pi$$

より $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ から}$$

 $0 \leq x \leq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5}{3}\pi$		2π
y'	$\nearrow$	+	0	-	0	-	0	+	$\nearrow$
y	0	$\nearrow$	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

よって, y は

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ で最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4}, x = \frac{5}{3}\pi \text{ で最小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ をとる。} \quad \text{答}$$

(2) $y' = \frac{-3(x^2+1) - (4-3x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-3)(3x+1)}{(x^2+1)^2}$

$1 < x < 4$ において $y' = 0$ となる x の値は $x = 3$

 $1 \leq x \leq 4$ における y の増減表は次のようになる。

x	1		3		4
y'	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	極小 $-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{8}{17}$

よって, y は

$$x = 1 \text{ で最大値 } \frac{1}{2}, x = 3 \text{ で最小値 } -\frac{1}{2} \text{ をとる。} \quad \text{答}$$

最大・最小の問題では
定義域の範囲で増減表
をかけばいいんだね。

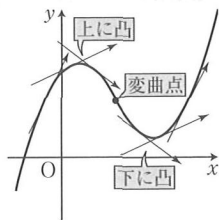


4 関数のグラフ

まとめ

1 下に凸, 上に凸

ある区間で、 x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが増加するとき、曲線はこの区間で 下に凸 であるという。また、接線の傾きが減少するとき、曲線はこの区間で 上に凸 であるという。

2 $f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

- ① $f''(x) > 0$ である区間では、曲線 $y=f(x)$ は下に凸である。
- ② $f''(x) < 0$ である区間では、曲線 $y=f(x)$ は上に凸である。

3 変曲点

曲線の凹凸が入れかわる境目の点を 変曲点 という。

4 曲線 $y=f(x)$ の変曲点

$f''(a)=0$ のとき、 $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば、点 $(a, f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

注意 点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば $f''(a)=0$ である。しかし、 $f''(a)=0$ でも点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるとは限らない。たとえば、 $f(x)=x^4$ のとき、 $f''(x)=12x^2$ より、 $f''(0)=0$ であるが、 $x=0$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わらない。よって、原点 $(0, 0)$ は曲線 $y=x^4$ の変曲点ではない。

5 グラフのかき方

関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は、次のようなことを調べ、増減表(凹凸を含む)をもとにしてかく。

- ① 関数の定義域
- ② 関数の増減、極値
- ③ 曲線の凹凸、変曲点
- ④ 座標軸との共有点、代表的な点
- ⑤ 漸近線
- ⑥ 曲線の対称性

注意 ⑤ 漸近線の判断(下では $\pm\infty$ 、 $b \neq 0$ などと略記した)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \text{ のとき} \quad \text{直線 } y=a$$

$$\lim_{x \rightarrow b \pm 0} f(x) = \pm\infty \text{ (複号任意) のとき} \quad \text{直線 } x=b$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax+b)\} = 0 \text{ のとき} \quad \text{直線 } y=ax+b$$

⑥ 曲線の対称性の判断

常に $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき y 軸に関して対称

常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき 原点に関して対称

6 第2次導関数と極値

関数 $f(x)$ について, $f''(x)$ が連続関数であるとき① $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば, $f(a)$ は極小値である。② $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば, $f(a)$ は極大値である。**注意** $f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ であるときは, $f(a)$ は極値となることもあるし, 極値とならないこともある。

A 曲線の凹凸

教 p.117

練習
14

次の曲線の凹凸を調べよ。また, 変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y=x^4+2x^3+1$

(2) $y=xe^{-x}$

(3) $y=x-\cos x \quad (0<x<\pi)$

(4) $y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$

指針 曲線の凹凸と変曲点 x, y'' (第2次導関数), y について凹凸の表を作る。 $y''>0$ の区間では曲線 $y=f(x)$ は下に凸, $y''<0$ の区間では上に凸である。また, 曲線の凹凸が入れかわる点が変曲点である。 $y''=0$ となる x の値の前後で y'' の符号が変わるかどうかを確かめる。**解答** (1) $y'=4x^3+6x^2$

$$y''=12x^2+12x=12x(x+1)$$

$$y''=0 \text{ とすると } x=0, -1$$

この曲線の凹凸は次の表のようになる。

x		-1		0	
y''	+	0	-	0	+
y	下に凸	0	上に凸	1	下に凸

曲線は, $x<-1, 0<x$ で下に凸, $-1<x<0$ で上に凸 答また, 変曲点の座標は $(-1, 0), (0, 1)$ 答

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}$

$$y''=-e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=e^{-x}(x-2)$$

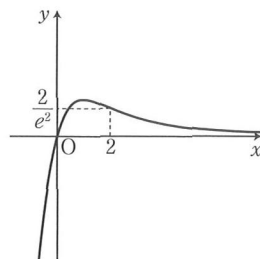
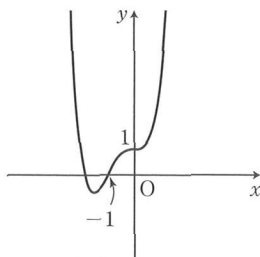
$$y''=0 \text{ とすると } x=2$$

この曲線の凹凸は次の表のようになる。

x		2	
y''	-	0	+
y	上に凸	$\frac{2}{e^2}$	下に凸

曲線は, $x<2$ で上に凸, $x>2$ で下に凸 答また, 変曲点の座標は $(2, \frac{2}{e^2})$ 答

(3) $y'=1+\sin x, y''=\cos x$



$0 < x < \pi$ において、 $y''=0$ となる x の値は $x=\frac{\pi}{2}$

この曲線の凹凸は次の表ようになる。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y''		+	0	-	
y		下に凸	$\frac{\pi}{2}$	上に凸	

曲線は、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で下に凸、

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ で上に凸 ㊟

また、変曲点の座標は $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ㊟

$$(4) \quad y' = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4$$

$$y'' = -12x^2 + 24x - 12$$

$$= -12(x^2 - 2x + 1)$$

$$= -12(x-1)^2$$

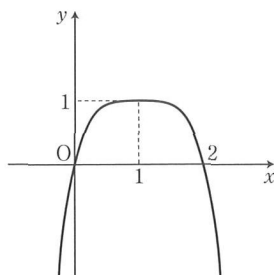
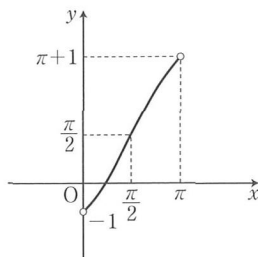
$$y''=0 \text{ とすると } x=1$$

この曲線の凹凸は次の表ようになる。

x		1	
y''	-	0	-
y	上に凸	1	上に凸

曲線は、常に上に凸である。 ㊟

また、変曲点は ない。 ㊟



4章

微分法の応用

B グラフのかき方

教 p.118

練習
15

関数 $y=e^{-2x^2}$ の増減、グラフの凹凸、漸近線を調べて、グラフの概形をかけ。

指針 グラフのかき方 $f(x)=e^{-2x^2}$ において、まず $f'(x)$, $f''(x)$ を求め、増減、極値、凹凸、変曲点を調べて増減表を作る。このとき、増減と凹凸を合わせて表す記号として、↗ (下に凸で増加), ↘ (上に凸で増加), ↙ (下に凸で減少), ↘ (上に凸で減少) が使われる。

漸近線は関数の定義域や値域を目安として調べる。

また、対称性の有無は x を $-x$ でおき換えた式で判断する。

グラフには極値を与える点、変曲点、座標軸との共有点など、代表的な点の座標を記入しておく。

解答 $f(x)=e^{-2x^2}$ とする。

$$f'(x) = -4xe^{-2x^2}$$

$$f''(x) = -4e^{-2x^2} - 4x(-4xe^{-2x^2}) = 4(4x^2 - 1)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0$$

$$f''(x) = 0 \text{ とすると } x = \pm \frac{1}{2}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は、次の表のようになる。

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↖	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗

$$\begin{aligned} \leftarrow f(x) &= e^u \\ u &= -2x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -4x \end{aligned}$$

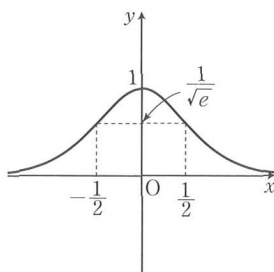
← 増減と凹凸

変曲点は 点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

また, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ であるから,

x 軸はこの曲線の漸近線である。さらに, グラフは y 軸に関して対称である。

以上から, グラフの概形は図のようになる。



注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x^2}} = 0$

同様に $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

また, $e^{-2(-x)^2} = e^{-2x^2}$ であるから,
グラフは y 軸に関して対称である。

漸近線や対称性が
わかるとグラフが
かきやすくなるね。



練習
16

関数 $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ のグラフの概形をかけ。

教 p.119

指針 グラフのかき方 $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ において, まず $f'(x), f''(x)$ を求め, 増減,

極値, 凹凸, 変曲点を調べて増減表を作ってからグラフの概形をかく。また, 本書 p.141 のまとめの **5** グラフのかき方を参考にして, グラフの漸近線を調べる。

解答 関数の定義域は $x \neq -1$ である。

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} \text{ とする。}$$

$f(x)=x-2+\frac{4}{x+1}$ であるから

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}, \quad f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は、次の表ようになる。

x		-3		-1		1	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	/	+	+	+
$f(x)$	↷	極大 -7	↶	/	↷	極小 1	↶

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty$$

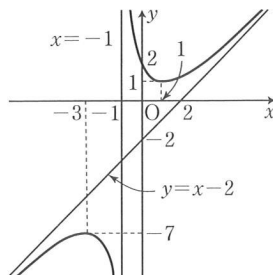
であるから、直線 $x=-1$ はこの曲線の漸近線である。

$$\text{さらに, } \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0$$

であるから、直線 $y=x-2$ もこの曲線の漸近線である。

以上から、概形は図ようになる。



注意 $\frac{x^2-x+2}{x+1}$ を変形した式から、 $x \neq -1$, $y \neq x-2$ であることがわかる。このことから、直線 $x=-1$, $y=x-2$ が漸近線であると推測できる。

4

章

微分法の応用

コラム 漸近線の求め方

まとめ

漸近線の求め方

関数 $y=f(x)$ のグラフに関して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax+b)\} = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{または } \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (ax+b)\} = 0$$

であるとき、直線 $y=ax+b$ は漸近線である。

確認

教 p.121

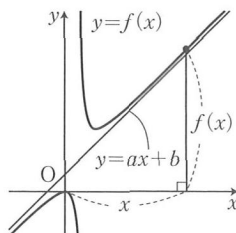
上の $\textcircled{1}$ であるとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} = b$ であることを確かめよう。

$$\begin{aligned} \text{解答 } \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax+b) + b\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax+b)\} + \lim_{x \rightarrow \infty} b \\ &= 0 + b = b \quad \text{終} \end{aligned}$$

補足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\}$ を求めることにより、漸近線の y 切片を求めることができる。

発見

① であるとき、 a もある極限值として求められる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a$ が成り立つような $g(x)$ を予想し、その $g(x)$ を、 $f(x)$ を用いて表してみよう。また、その予想が正しいことを証明してみよう。



教 p.121

指針 漸近線の傾きの求め方 ① であるとき、十分大きい x について $f(x) - (ax+b) \div 0$ すなわち、 $f(x) \div ax+b$ と考えることができる。

解答 十分大きい x について $f(x) - (ax+b) \div 0$ と考えると

$$\frac{f(x)}{x} \div a + \frac{b}{x} \text{ とかけることや、 } \frac{b}{x} \div 0 \text{ であることから}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{f(x)}{x} \rightarrow a \text{ であること、すなわち } g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{答}$$

であることが予想される。実際

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (ax+b) + (ax+b)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \{f(x) - (ax+b)\} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{x}\right) \\ &= 0 \cdot 0 + a + 0 = a \end{aligned}$$

である。 終

教 p.121

まとめ

関数 $y = \sqrt{x^2 + 8x}$ ($x \geq 0$) のグラフには $y = ax + b$ のようにかける漸近線が存在する。この漸近線の方程式を求めてみよう。

指針 漸近線の求め方 関数 $y = f(x)$ のグラフに漸近線 $y = ax + b$ が存在するとき、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ または } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} = b \text{ または } \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - ax\} = b$$

である。

本問では関数の定義域が $x \geq 0$ であるから、 $x \rightarrow \infty$ の極限を考える。

解答

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{8}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 8x} - x)(\sqrt{x^2 + 8x} + x)}{\sqrt{x^2 + 8x} + x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 8x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 8x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1 + \frac{8}{x}} + 1} = 4$$

よって、求める漸近線の方程式は $y = x + 4$ 答

【参考】 $y = \sqrt{x^2 + 8x}$ ($x \geq 0$) のグラフは双曲線 $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$ の一部であり、直線 $y = x + 4$ はこの双曲線の漸近線のうちの1つである。

C 第2次導関数と極値

教 p.123

練習
17

次の関数の極値を、第2次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ (2) $f(x) = x + 2\sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

指針 第2次導関数と極値 極値の判定に $f''(x)$ を利用する。 $f'(x) = 0$ となる x の値 a を求め、その値を $f''(x)$ に代入する。 $f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値、 $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値である。

解答 (1) $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, \pm\sqrt{3}$$

$$\text{ここで } f''(-\sqrt{3}) = 24 > 0, \quad f''(0) = -12 < 0, \quad f''(\sqrt{3}) = 24 > 0$$

$$\text{また } f(0) = 5, \quad f(\pm\sqrt{3}) = -4$$

よって、 $f(x)$ は

$$x = 0 \text{ で極大値 } 5, \quad x = \pm\sqrt{3} \text{ で極小値 } -4 \text{ をとる。 答}$$

(2) $f'(x) = 1 + 2\cos x$

$$f''(x) = -2\sin x$$

$0 < x < 2\pi$ において、 $f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{4}{3}\pi \quad \leftarrow \cos x = -\frac{1}{2} \text{ の解}$$

$$\text{ここで } f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3} < 0, \quad f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$$

$$\text{また } f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

よって、 $f(x)$ は

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ で極大値 } \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}, \quad x = \frac{4}{3}\pi \text{ で極小値 } \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

をとる。 答

4 章

微分法の応用

第4章 第1節

問題

教 p.124

1 曲線 $y=e^{-x}$ 上の点 $(-1, e)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

指針 接線と法線の方程式 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線の方程式は $f'(a) \neq 0$ のとき $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

解答 $f(x)=e^{-x}$ とすると $f'(x)=-e^{-x}$

であるから $f'(-1)=-e$

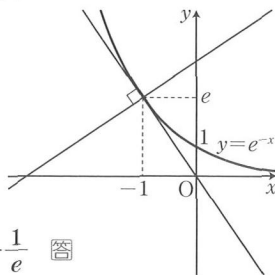
よって、点 $(-1, e)$ における 接線の方程式 は

$$y-e=-e(x+1)$$

すなわち $y=-ex$ 答

また、点 $(-1, e)$ における 法線の方程式 は

$$y-e=\frac{1}{e}(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{1}{e}x+e+\frac{1}{e} \quad \text{答}$$



教 p.124

2 次のことを示せ。ただし、 p は 0 でない定数、 a, b は正の定数とする。

(1) 放物線 $y^2=4px$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は、
 $y_1y=2p(x+x_1)$ である。

(2) 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は、

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \text{ である。}$$

指針 曲線の方程式と接線の方程式 曲線の方程式が x, y で表されているから、 y を x の関数とみて、方程式の両辺を x で微分して導関数 y' を求める。
点 (x_1, y_1) を通り、傾きが $x=x_1$ における微分係数である直線の方程式を求めればよい。

解答 (1) $y^2=4px$ の両辺を x で微分すると $2yy'=4p$

よって、 $y \neq 0$ のとき $y'=\frac{2p}{y}$

ゆえに、 $y_1 \neq 0$ のとき、点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$y-y_1=\frac{2p}{y_1}(x-x_1)$$

整理すると $y_1y=2px+y_1^2-2px_1$

$y_1^2=4px_1$ であるから $y_1y=2px+2px_1$

すなわち $y_1 y = 2p(x + x_1) \dots\dots ①$

また、 $y_1 = 0$ のとき $x_1 = 0$ で、接線は直線 $x = 0$ であるから ① の式で表される。

したがって、点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $y_1 y = 2p(x + x_1)$ 図

$$(2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の両辺を } x \text{ で微分すると } \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y' = 0$$

よって、 $y \neq 0$ のとき $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

ゆえに、 $y_1 \neq 0$ のとき、点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

両辺に $\frac{y_1}{b^2}$ を掛けて整理すると $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ であるから } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \dots\dots ①$$

また、 $y_1 = 0$ のとき $x_1 = \pm a$

点 $(a, 0)$ における接線の方程式は $x = a$

これは、① において $x_1 = a, y_1 = 0$ とした場合である。

点 $(-a, 0)$ における接線の方程式は $x = -a$

これは、① において $x_1 = -a, y_1 = 0$ とした場合である。

したがって、点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ 図

教 p.124

- 3 2つの曲線 $y = ax^2 + b$, $y = \log x$ が、点 $A(e, 1)$ を共有し、かつ点 A で共通な接線をもつように、定数 a, b の値を定めよ。

指針 共通な接線 点 A が曲線 $y = ax^2 + b$ 上にあることと、2つの曲線の点 A における接線の傾きが等しいことを使う。

解答 $f(x) = ax^2 + b$, $g(x) = \log x$ とする。

点 $A(e, 1)$ が曲線 $y = f(x)$ 上にあるから

$$f(e) = 1$$

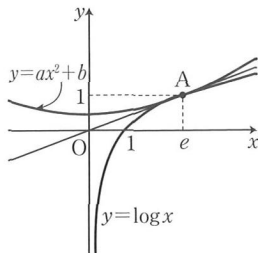
すなわち $ae^2 + b = 1 \dots\dots ①$

また、 $f'(x) = 2ax$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ であり、

曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 上の点 $A(e, 1)$ における接線の傾きは等しいから $f'(e) = g'(e)$

すなわち $2ae = \frac{1}{e} \dots\dots ②$

①, ② から $a = \frac{1}{2e^2}$, $b = \frac{1}{2}$ 答



4 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y = x^2 \log x$

(2) $y = |x+1|e^x$

指針 関数の極値 $y'=0$ となる x の値を求め、増減表を作って、極値を求める。

(1) 定義域に注意する。

(2) 定義域を分割して絶対値の記号をはずし、それぞれの区間で調べる。なお、 $x=a$ で微分可能でなくても、 $x=a$ で極値をとることがあることに注意する。

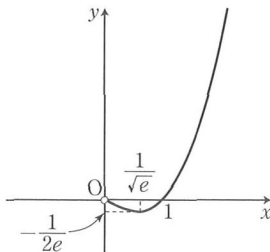
解答 (1) 関数の定義域は $x > 0$ である。

$$y' = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

y の増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
y'		-	0	+
y			極小 $-\frac{1}{2e}$	



よって、 y は $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\frac{1}{2e}$ をとる。極大値はない。 図

(2) $x \geq -1$ のとき $y = (x+1)e^x$

$$x > -1 \text{ において } y' = (x+2)e^x$$

よって、 $x > -1$ では常に

$$y' > 0$$

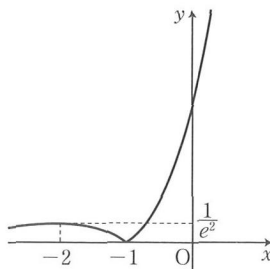
$x < -1$ のとき $y = -(x+1)e^x$

$$y' = -(x+2)e^x$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = -2$$

y の増減表は次のようになる。

x		-2		-1	
y'	+	0	-		+
y		極大 $\frac{1}{e^2}$		極小 0	



よって、 y は $x = -2$ で極大値 $\frac{1}{e^2}$ 、 $x = -1$ で極小値 0 をとる。 図

5 次の関数の最大値、最小値を求めよ。

(1) $y = x\sqrt{4-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 2$) (2) $y = x + \sqrt{4-x^2}$

指針 関数の最大・最小 導関数 y' を求め、区間の両端を含めた増減表を作る。極値と両端における関数の値の大小を比較して、最大値、最小値を判断する。

(2) 区間の指示がない場合は、まず定義域を調べる。

解答 (1) $y' = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$
 $-1 < x < 2$ において、 $y' = 0$ となる x の値は $x = \sqrt{2}$
 y の増減表は次のようになる。

x	-1		$\sqrt{2}$		2
y'		+	0	-	
y	$-\sqrt{3}$	↗	極大 2	↘	0

よって、 y は

$x = \sqrt{2}$ で最大値 2,

$x = -1$ で最小値 $-\sqrt{3}$ をとる。 答

(2) 関数の定義域は $-2 \leq x \leq 2$ である。

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$-2 < x < 0$ のとき、 $\sqrt{4-x^2} > 0$, $-x > 0$ であるから $y' > 0$

$0 \leq x < 2$ のとき、 $(4-x^2)-x^2 = 2(2-x^2)$ であることから

$0 \leq x < \sqrt{2}$ のとき $y' > 0$ $x = \sqrt{2}$ のとき $y' = 0$

$\sqrt{2} < x < 2$ のとき $y' < 0$

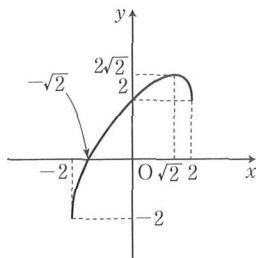
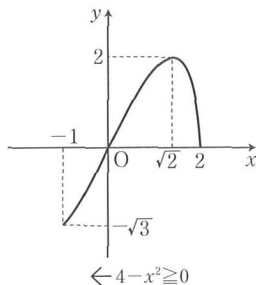
y の増減表は次のようになる。

x	-2		$\sqrt{2}$		2
y'		+	0	-	
y	-2	↗	極大 $2\sqrt{2}$	↘	2

よって、 y は

$x = \sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$,

$x = -2$ で最小値 -2 をとる。 答



- 6 曲線 $y=x^4+ax^3+3ax^2+1$ が変曲点をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

指針 曲線が変曲点をもつ条件 $y''=0$ となる x の値の前後で y'' の符号が変わればよい。

解答 $y=x^4+ax^3+3ax^2+1$ …… ① とする。

$$y'=4x^3+3ax^2+6ax, \quad y''=12x^2+6ax+6a$$

$$y''=0 \text{ とすると } 2x^2+ax+a=0 \quad \text{…… ②}$$

曲線 ① が変曲点をもつためには、 x の 2 次方程式 ② が実数解 α をもち、 $x=\alpha$ の前後で y'' の符号が変わること、すなわち、② が異なる 2 つの実数解をもつことが必要である。逆に、② が異なる 2 つの実数解をもつとき、これらを $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、次の表より確かに曲線 ① は変曲点をもつ。

x	……	α	……	β	……
y''	+	0	-	0	+
y	下に凸	変曲点	上に凸	変曲点	下に凸

よって、② の判別式を D とすると $D>0$ が必要十分条件である。

$$D=a^2-4 \cdot 2 \cdot a=a^2-8a \quad D>0 \text{ より } a^2-8a>0$$

これを解いて $a<0, 8<a$ 答

- 7 関数 $y=\frac{x^2-x-2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ。

指針 グラフの概形 $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}$ において、 $f'(x), f''(x)$ を求めて、関数の増減と極値、曲線の凹凸と変曲点を調べ、増減表を作る。

解答 関数の定義域は $x \neq 1$ である。

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1} \text{ とする。} f(x)=x-\frac{2}{x-1} \text{ であるから}$$

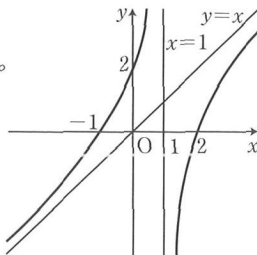
$$f'(x)=1+\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{4}{(x-1)^3}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は、次の表のようになる。

x	……	1	……
$f'(x)$	+	↗ ↘	+
$f''(x)$	+	↗ ↘	-
$f(x)$	↗	↗ ↘	↘

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \infty$$



であるから、直線 $x=1$ はこの曲線の漸近線である。

さらに $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - x\} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - x\} = 0$

であるから、直線 $y=x$ もこの曲線の漸近線である。

以上から、グラフの概形は図のようになる。

教 p.124

- 8 関数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ について、 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。また、関数 $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

指針 グラフの概形と最大・最小 $f'(x), f''(x)$ を求めて、関数の増減と極値、曲線の凹凸と変曲点、漸近線を調べて概形をかく。

解答

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x\{x^2+1+2(1-x^2)\}}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は、次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	変曲点 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	極小 $-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	変曲点 0	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{2}$	$\searrow$	変曲点 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$

また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

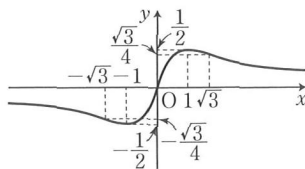
であるから、 x 軸はこの曲線の漸近線である。

よって、グラフは右の図のようになる。

また、グラフより $f(x)$ は

$x=1$ で最大値 $\frac{1}{2}$, $x=-1$ で最小値 $-\frac{1}{2}$

をとる。 答



第2節 いろいろな応用

5 方程式、不等式への応用

A 不等式の証明

教 p.125

練習
18

$x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。ただし、(2) では教科書の応用例題 4 で証明したことを用いてもよい。

(1) $\log(x+1) < x$

(2) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

指針 不等式の証明 (1) は $f(x) = x - \log(x+1)$, (2) は $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ として、 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であることを示す。関数 $f(x)$ の増減を利用する。

解答 (1) $f(x) = x - \log(x+1)$ とすると

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

$x > 0$ のとき $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

ゆえに、 $x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$

$$\leftarrow f(0) = -\log 1$$

したがって、 $x > 0$ のとき $\log(x+1) < x$ 終

(2) $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ とすると

$$f'(x) = e^x - (1+x)$$

$x > 0$ のとき、 $e^x > 1+x$ であるから

$$f'(x) > 0$$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

ゆえに、 $x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$

$$\leftarrow f(0) = e^0 - 1$$

したがって、 $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ 終

別解 (2) 教科書の応用例題 4 の不等式 $e^x > 1+x$ をそのまま利用せず、その証明も含めて解答するには、第 2 次導関数 $f''(x)$ を使う。

$$f'(x) = e^x - (1+x), \quad f''(x) = e^x - 1$$

$x > 0$ のとき、 $f''(x) > 0$ であるから、

$f'(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

$$\leftarrow x > 0 \text{ のとき, } e^x > e^0 = 1$$

よって $f'(x) > f'(0) = 0$

ゆえに、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

したがって、 $x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$

よって、 $x>0$ のとき $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2$ 終

【参考】 練習 18(2) より、 $x>0$ のとき

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2} > \frac{x^2}{2}$$

$$\text{よって } \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \quad \cdots \cdots \text{①} \quad \frac{x}{e^x} < \frac{2}{x} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{① と } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \infty \text{ から } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

$$\text{② と } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ から } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

一般に、任意の自然数 n に対して、次のことが成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

B 方程式の実数解の個数

教 p.126

練習
19

a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$(1) \frac{x^3}{x-1} = a$$

$$(2) xe^x - a = 0$$

指針 方程式の実数解の個数

(1) 関数 $y = \frac{x^3}{x-1}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べる。

(2) 方程式を $xe^x = a$ と変形して、関数 $y = xe^x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べる。

解答 (1) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ とすると

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

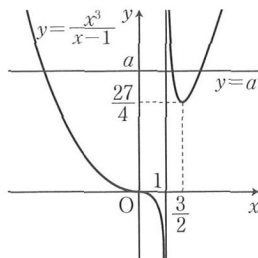
x		0		1		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	-	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	/	$\searrow$	極小 $\frac{27}{4}$	$\nearrow$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$

$y=f(x)$ のグラフは図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は、求める実数解の個数と一致する。



$a > \frac{27}{4}$ のとき 3 個, $a = \frac{27}{4}$ のとき 2 個,

$a < \frac{27}{4}$ のとき 1 個 答

(2) $xe^x - a = 0$ から $xe^x = a$

$f(x) = xe^x$ とすると

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		-1	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

また $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ であり,

$x = -t$ とおくと

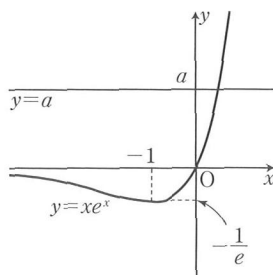
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{e^t} \right) = 0$$

$y = f(x)$ のグラフは図のようになる。

このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は, 求める実数解の個数と一致する。

$-\frac{1}{e} < a < 0$ のとき 2 個, $a = -\frac{1}{e}$, $a \geq 0$ のとき 1 個,

$a < -\frac{1}{e}$ のとき 0 個 答



6 速度と加速度

まとめ

1 速度と加速度 (直線)

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標 x が $x=f(t)$ で表されるとき、時刻 t における点 P の速度 v 、加速度 α は

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

注意 時刻 t から $t+\Delta t$ までの平均速度は、 $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ で表される。

極限值 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ を、時刻 t における点 P の速度という。速度を v で表すとき、絶対値 $|v|$ を速さという。また、速度 v の時刻 t における変化率を加速度という。

点 P は、 $v > 0$ のとき数直線上を正の向きに動き、 $v < 0$ のとき負の向きに動く。一方、速さには向きの概念がない。

2 速度と加速度 (平面)

座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t における x 座標、 y 座標が t の関数であるとき、時刻 t における点 P の速度 $\vec{v}$ 、速さ $|\vec{v}|$ 、加速度 $\vec{\alpha}$ 、加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

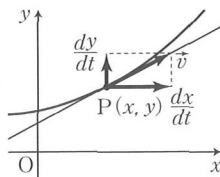
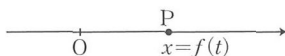
$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right), \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2}$$

注意 点 P の x 軸方向の速度、 y 軸方向の速度を成分とするベクトル $\vec{v}$ を、時刻 t における点 P の速度という。 $\vec{v}$ の向きは、点 P の描く曲線の点 P における接線の向きと一致する。

速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を、点 P の速さという。

x 軸方向の加速度、 y 軸方向の加速度を成分とするベクトル $\vec{\alpha}$ を、時刻 t における点 P の加速度という。また、加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を、点 P の加速度の大きさという。



4 章

微分法の応用

A 直線上の点の運動

教 p.128

練習
20

地上から、初速度 v_0 m/s でボールを真上に打ち上げるとき、 t 秒後の高さ x m は、 $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ で与えられる。ただし、 g は定数とする。 t 秒後におけるボールの速度 v m/s と加速度 α m/s² を求めよ。

指針 速度と加速度 真上に打ち上げるから、地上を原点とする直線運動と考えられる。ボールの高さ x (m) を t で微分すると速度 v (m/s) が得られ、 v を t で微分すると加速度 α (m/s²) が得られる。

解答 速度 v は $v = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt$ (m/s) ㊟

加速度 α は $\alpha = \frac{dv}{dt} = -g$ (m/s²) ㊟

B 平面上の点の運動

教 p.130

練習
21

時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられるとき、 $t=3$ における P の速さ、加速度の大きさを求めよ。

$$(1) \quad x=2t+1, \quad y=t^2-4t \qquad (2) \quad x=2\cos\pi t, \quad y=2\sin\pi t$$

指針 速さ、加速度の大きさ 速さは速度を表すベクトル $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ であることに注意する。 $\vec{v}$, $\vec{\alpha}$ の各成分を求めてから $t=3$ を代入する。求めるものは $|\vec{v}|$, $|\vec{\alpha}|$ である。

解答 時刻 t における点 P の速度を $\vec{v}$, 加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

$$(1) \quad \frac{dx}{dt}=2, \quad \frac{dy}{dt}=2t-4 \quad \text{また} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=2$$

$$\text{よって, } t=3 \text{ のとき} \quad \vec{v}=(2, 2), \quad \vec{\alpha}=(0, 2) \qquad \leftarrow 2 \cdot 3 - 4$$

したがって、求める速さ $|\vec{v}|$, 加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}, \quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+2^2}=2 \quad \text{㊟}$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt}=-2\pi\sin\pi t, \quad \frac{dy}{dt}=2\pi\cos\pi t$$

$$\text{また} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-2\pi^2\cos\pi t, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-2\pi^2\sin\pi t$$

よって、 $t=3$ のとき

$$\vec{v}=(-2\pi\sin 3\pi, 2\pi\cos 3\pi)=(0, -2\pi)$$

$$\vec{\alpha}=(-2\pi^2\cos 3\pi, -2\pi^2\sin 3\pi)=(2\pi^2, 0)$$

したがって、求める速さ $|\vec{v}|$, 加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+(-2\pi)^2}=2\pi, \quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{(2\pi^2)^2+0^2}=2\pi^2 \quad \text{㊟}$$

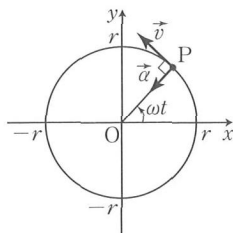
【参考】一般に、点 P の座標が時刻 t の関数として

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t \quad (r, \omega \text{ は正の定数})$$

で表されるとき、P は円 $x^2 + y^2 = r^2$ の周上を動く。

この円運動の速さは $|\vec{v}| = r\omega$ であり、一定である。

このように、速さが一定の円運動を **等速円運動** という。



教 p.130

深める

一般に、等速円運動する点 P の加速度 $\vec{a}$ の向きは、P から円の中心に向かう向きであり、 $\vec{a}$ は速度 $\vec{v}$ に垂直である。教科書の例題 11 について、このことを確かめよう。

4 章

微分法の応用

指針 等速円運動の速度と加速度 加速度 $\vec{a}$ の向きが P から円の中心に向かう向きであることを確かめるには、円の中心を O とするとき、 $\vec{a}$ が $\overrightarrow{OP}$ と逆向きであることを確かめればよい。また、 $\vec{a}$ が速度 $\vec{v}$ に垂直であることを確かめるには、 $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ を確かめればよい。

解答 例題 11 における点 P は、原点 O を中心とする半径 r の円の周上を等速円運動する。また、

$$\vec{v} = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t),$$

$$\vec{a} = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

である。ここで、 $\overrightarrow{OP} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ より

$$\vec{a} = -\omega^2 (r \cos \omega t, r \sin \omega t) = -\omega^2 \overrightarrow{OP}$$

と表されるから、加速度 $\vec{a}$ の向きは、P から円の中心に向かう向きである。

終

また

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = (-r\omega^2 \cos \omega t) \times (-r\omega \sin \omega t) + (-r\omega^2 \sin \omega t) \times r\omega \cos \omega t$$

$$= r^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - r^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$= 0$$

$\vec{a}, \vec{v}$ はともに $\vec{0}$ でないから $\vec{a} \perp \vec{v}$ 終

7 近似式

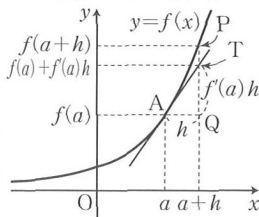
まとめ

1 1次の近似式

 $h \div 0$ のとき

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$$

注意 微分係数 $f'(a)$ を使って $f(a+h)$ の値を h の1次式で近似する。図形的な意味は図の点Pのy座標を点Tのy座標で近似するということである。

2 $x \div 0$ のときの1次の近似式

$$x \div 0 \text{ のとき } f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

注意 1次の近似式 $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$ で、 $a=0$ とし、 h を x でおき換えたものである。

A $f(a+h)$ の近似式

教 p.132

練習
22

$h \div 0$ のとき、次の関数の値について、1次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a+h)$

(2) $\tan(a+h)$

指針 1次の近似式 それぞれ関数 $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ において、 $f(a+h)$ の値の1次の近似式を作る。導関数 $f'(x)$, 微分係数 $f'(a)$ の順に求めて、 $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$ に代入する。

なお、下の解答では、関数を $f(x)$ とすることを省いている。

解答 (1) $(\cos x)' = -\sin x$ であるから、 $h \div 0$ のとき

$$\cos(a+h) \doteq \cos a - h \sin a \quad \text{答}$$

(2) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ であるから、 $h \div 0$ のとき

$$\tan(a+h) \doteq \tan a + \frac{h}{\cos^2 a} \quad \text{答}$$

B $x \div 0$ のときの1次の近似式

教 p.132

練習
23

$x \div 0$ のとき、次の関数について、1次の近似式を作れ。

(1) e^x

(2) $\log(1+x)$

(3) $\frac{1}{1+x}$

指針 1次の近似式 それぞれの関数を $f(x)$ として、導関数 $f'(x)$, $f(0)$, 微分係数

$f'(0)$ の順に求め、 $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$ に代入する。

解答 (1) $f(x) = e^x$ について $f'(x) = e^x$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1 \text{ であるから}$$

$$x \doteq 0 \text{ のとき } e^x \doteq 1 + 1 \cdot x$$

$$\text{すなわち } e^x \doteq 1 + x \quad \text{答}$$

$$\leftarrow e^0 = 1$$

$$\leftarrow f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$(2) f(x) = \log(1+x) \text{ について } f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ であるから}$$

$$x \doteq 0 \text{ のとき } \log(1+x) \doteq 0 + 1 \cdot x$$

$$\text{すなわち } \log(1+x) \doteq x \quad \text{答}$$

$$\leftarrow f(0) = \log 1 = 0$$

$$\leftarrow f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ について } f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f(0) = 1, f'(0) = -1 \text{ であるから}$$

$$x \doteq 0 \text{ のとき } \frac{1}{1+x} \doteq 1 + (-1) \cdot x$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{1+x} \doteq 1 - x \quad \text{答}$$

$$\leftarrow f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

4 章

微分法の応用

練習
24

教 p.132

1 次の近似式を用いて、次の数の近似値を求めよ。

$$(1) \sqrt[4]{1.03} \quad (2) \log 1.01 \quad (3) \frac{1}{0.998}$$

指針 近似値の計算 (1) 教科書の例題 12 で導いた次の近似式を利用する。

$$x \doteq 0 \text{ のとき } (1+x)^p \doteq 1 + px \quad (p \text{ は有理数})$$

(2), (3) それぞれ練習 23 (2), (3) の結果を利用する。

解答 (1) $x \doteq 0$ のとき $(1+x)^p \doteq 1 + px$ (p は有理数)

$$\sqrt[4]{1.03} = (1+0.03)^{\frac{1}{4}} \text{ であるから}$$

$$\sqrt[4]{1.03} \doteq 1 + \frac{1}{4} \cdot 0.03 = 1.0075 \quad \text{答}$$

(2) $x \doteq 0$ のとき、 $\log(1+x) \doteq x$ であるから

$$\log 1.01 = \log(1+0.01) \doteq 0.01 \quad \text{答}$$

(3) $x \doteq 0$ のとき、 $\frac{1}{1+x} \doteq 1 - x$ であるから

$$\frac{1}{0.998} = \frac{1}{1+(-0.002)} \doteq 1 - (-0.002) = 1.002 \quad \text{答}$$

第4章 第2節

問題

教 p.133

9 $x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$$

指針 不等式の証明 $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ として、 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であることを示す。

関数 $f(x)$ の増減を利用する。

解答 $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ とすると

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1 - (1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

$x > 0$ のとき $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

ゆえに、 $x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$

← $f(0) = \log 1$

したがって、 $x > 0$ のとき $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ 終

教 p.133

10 方程式 $x^2 = ae^x$ が異なる 3 個の実数解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

指針 方程式の実数解の個数 方程式の右辺が定数 a だけになるように変形すると $\frac{x^2}{e^x} = a$ となる。関数 $y = \frac{x^2}{e^x}$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べればよい。

解答 $e^x \neq 0$ であるから、 $x^2 = ae^x$ の両辺を e^x で割って $\frac{x^2}{e^x} = a$

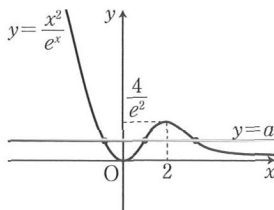
$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \text{ とすると } f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = -\frac{x(x-2)}{e^x}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		0		2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		極小 0		極大 $\frac{4}{e^2}$	

また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

$y = f(x)$ のグラフは図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は、方程式の実数解の個数と一致する。
したがって、方程式 $x^2=ae^x$ が異なる 3 個の実数解をもつような a の値の範囲は $0 < a < \frac{4}{e^2}$ 答

注意 教科書 p.125 の〈注意〉にあるように、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ である。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x}$ については、 $x = -t$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-t)^2}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^t = \infty \text{ となる。}$$

教 p.133

11 座標平面上を運動する点 P の座標 (x, y) が、時刻 t の関数として、次の式で表されるとき、時刻 t における P の加速度の大きさを求めよ。

$$x = a(\omega t - \sin \omega t), \quad y = a(1 - \cos \omega t) \quad (a, \omega \text{ は正の定数})$$

指針 加速度の大きさ 速度を表すベクトルは $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ 、加速度を表すベクトルは $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$ である。 $\vec{a}$ の大きさを求める。

解答

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a\omega(1 - \cos \omega t), & \frac{dy}{dt} &= a\omega \sin \omega t \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= a\omega^2 \sin \omega t, & \frac{d^2y}{dt^2} &= a\omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

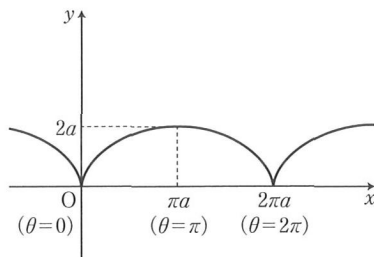
よって、加速度の大きさは

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2} = \sqrt{(a\omega^2)^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = a\omega^2 \quad \text{答}$$

注意 $\theta = \omega t$ とおくと

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

θ を媒介変数として上の式で表される曲線はサイクロイドとよばれる曲線であり、図のようになる。



教 p.133

12 $\sin 31^\circ$ の近似値を、1 次の近似式を用いて、小数第 3 位まで求めよ。
ただし、 $\pi = 3.142$, $\sqrt{3} = 1.732$ とする。

指針 近似値の計算 $h \neq 0$ のとき $\sin(a+h) \approx \sin a + h \cos a$ を利用する。

$$31^\circ = 30^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \text{ であるから } a = \frac{\pi}{6}, \quad h = \frac{\pi}{180} \text{ とおく。}$$

解答 $(\sin x)' = \cos x$ であるから、 $h \div 0$ のとき $\sin(a+h) \div \sin a + h \cos a$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sin 31^\circ &= \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \\ &\div \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \sin 31^\circ \div \frac{1}{2} + \frac{3.142 \times 1.732}{360} \div 0.515 \quad \text{答}$$

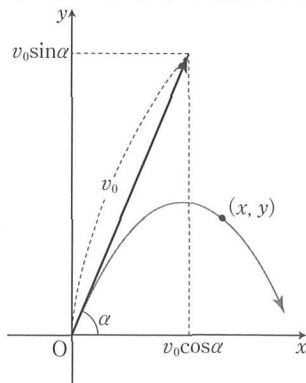
教 p.133

13 右の図のように、原点 O から物体 P を、水平面と角 α をなす方向に、速さ v_0 で投げたとき、時刻 t における P の位置 (x, y) は、空気の抵抗を無視すると、 g を定数として

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

と表される。このとき、 P の高さ y が最大になる時刻 T において、 P の速さが最小になることを示せ。また、時刻 T における P の速さを求めよ。

ただし、 $g > 0$, $v_0 > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。



指針 斜めに投げた物体の速さ 速度を表すベクトルは $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ であり、その速さは $|\vec{v}|$ である。

解答
$$y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

よって、 P の高さが最大となる時刻 T は $T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

また、 P の時刻 t における速度を $\vec{v}$ とする。

$\vec{v}$ の成分は $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt$

よって、 P の速さ $|\vec{v}|$ は

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \sqrt{g^2 \left(t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

したがって、 P の速さが最小となる時刻は $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ で、 P の高さが最大となる時刻 T と一致する。 終

また、時刻 T において $|\vec{v}| = v_0 \cos \alpha$ 答

第4章 章末問題A

教 p.134

1. 次の曲線上の、与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $y = \frac{x-2}{x+2}$, 点 (2, 0) (2) $y = \tan x$, 点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

指針 接線, 法線の方程式 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線の方程式は $f'(a) \neq 0$ のとき $y-f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

解答 (1) $y' = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$

よって, 点 (2, 0) における接線の傾きは $\frac{4}{(2+2)^2} = \frac{1}{4}$

また, 法線の傾きは -4

したがって, 求める 接線の方程式は

$$y-0 = \frac{1}{4}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

法線の方程式は

$$y-0 = -4(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = -4x + 8 \quad \text{答}$$

(2) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ であるから, 点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ における

接線の傾きは $\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$ また, 法線の傾きは $-\frac{1}{2}$

したがって, 求める 接線の方程式は

$$y-1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1 \quad \text{答}$$

法線の方程式は

$$y-1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1 \quad \text{答}$$

教 p.134

2. 平均値の定理を用いて, 次のことを証明せよ。

$$a > 0 \text{ のとき} \quad \frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$$

指針 平均値の定理の応用 関数 $f(x) = \log x$ を考えると, 不等式の中央の式は,
 $b = a+1$ とおくと $b-a=1$ であるから, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の形をしている。

区間 $[a, a+1]$ で平均値の定理を用いる。

解答 関数 $f(x)=\log x$ は、 $x>0$ で微分可能で $f'(x)=\frac{1}{x}$

区間 $[a, a+1]$ において、平均値の定理を用いると

$$\frac{\log(a+1)-\log a}{(a+1)-a}=\frac{1}{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a < c < a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)=\frac{1}{x}$ は $x>0$ で減少するから、 $\textcircled{2}$ より

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a+1}$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{a+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

よって、 $\textcircled{1}$ より

$$\frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a} \quad \text{終}$$

教 p.134

3. 次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。

(1) $y=x^2+\log(9-x^2)$

(2) $y=|x^3-3x|$

指針 関数の増減と極値

(1) 定義域に注意して増減表を作る。

(2) 区間に分けて絶対値記号をはずしてから導関数を求め、増減表を作る。

解答 (1) この関数の定義域は

$$9-x^2>0 \text{ より } -3<x<3$$

$$\begin{aligned} y' &= 2x - \frac{2x}{9-x^2} \\ &= \frac{2x(8-x^2)}{9-x^2} \end{aligned}$$

$y'=0$ とすると

$$x=0, \pm 2\sqrt{2}$$

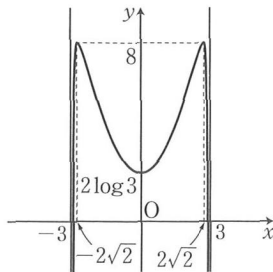
y の増減表は次のようになる。

x	-3		$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$		3
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y		↗	極大 8	↘	極小 $2\log 3$	↗	極大 8	↘	

よって、 $x=\pm 2\sqrt{2}$ で極大値 8、 $x=0$ で極小値 $2\log 3$ 終

(2) $f(x)=|x^3-3x|$ とする。

$f(x)=|x(x^2-3)|$ であるから



$$-\sqrt{3} \leq x \leq 0, \sqrt{3} \leq x \text{ のとき } y = x^3 - 3x$$

$$-\sqrt{3} < x < 0, \sqrt{3} < 0 \text{ において } y' = 3x^2 - 3$$

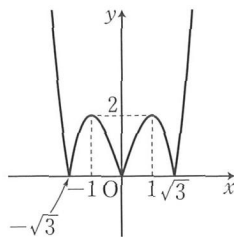
$$y' = 0 \text{ とすると } x = -1$$

$$x < -\sqrt{3}, 0 < x < \sqrt{3} \text{ のとき}$$

$$y = -x^3 + 3x, y' = -3x^2 + 3$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 1$$

y の増減表は次のようになる。



x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	-		+	0	-		+	0	-		+
y	↘	極小 0	↗	極大 2	↘	極小 0	↗	極大 2	↘	極小 0	↗

よって, $x = \pm\sqrt{3}, 0$ で極小値 0 , $x = \pm 1$ で極大値 2 答

教 p.134

4. 次の関数のグラフの概形をかけ。

$$(1) y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$(2) y = x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

指針 グラフの概形 (1) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ において, $f'(x), f''(x)$ を求めて, 関数の

増減と極値, 曲線の凹凸と変曲点を調べ, 増減表を作る。漸近線も調べる。

解答 (1) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ とする。

$$f(x) = \frac{(x^2+1)-2x}{x^2+1} = 1 - \frac{2x}{x^2+1} \text{ であるから}$$

$$f'(x) = -\frac{2(x^2+1)-2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+1)^2 - 2(x^2-1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2+1) - 4x \cdot 2(x^2-1)}{(x^2+1)^3} = -\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \pm 1$$

$$f''(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, \pm\sqrt{3}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は, 次の表のようになる。

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	↗	変曲点 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	極大 2	↘	変曲点 1	↘	極小 0	↗	変曲点 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗

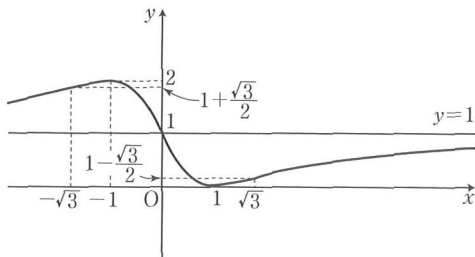
変曲点は、点 $\left(-\sqrt{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0, 1)$, $\left(\sqrt{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)-1\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{2x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\leftarrow -\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$$

同様に、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x)-1\} = 0$ であるから、
直線 $y=1$ はこの曲線の漸近線である。

以上から、グラフの概形は図のようになる。



$$(2) \quad y' = 1 - \sin x, \quad y'' = -\cos x$$

$0 < x < 2\pi$ において

$$y' = 0 \text{ となる } x \text{ の値は } x = \frac{\pi}{2}$$

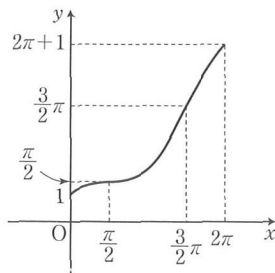
$$y'' = 0 \text{ となる } x \text{ の値は } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

y の増減やグラフの凹凸は、次の表のようになる。

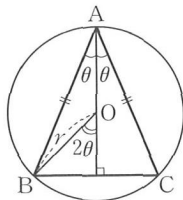
x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
y'		+	0	+	+	+	
y''		-	0	+	0	-	
y	1		変曲点 $\frac{\pi}{2}$		変曲点 $\frac{3}{2}\pi$		$2\pi+1$

変曲点は 点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

以上から、グラフの概形は図のようになる。



5. 円に内接する二等辺三角形の中で、周の長さが最大になるものは正三角形である。このことを、円の半径を r 、二等辺三角形の頂角の大きさを 2θ とし、周の長さ l を θ の関数で表すことによって示せ。



指針 最大・最小の応用 区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ で l が最大となるのは、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときであることを示せばよい。

解答 図において $AB = AC = 2r \cos \theta$

$$BC = 2r \sin 2\theta$$

であるから

$$l = 4r \cos \theta + 2r \sin 2\theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{dl}{d\theta} &= -4r \sin \theta + 4r \cos 2\theta \\ &= -4r \sin \theta + 4r(1 - 2\sin^2 \theta) \\ &= -4r(2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1) \\ &= -4r(2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin \theta + 1 > 0$ であるから、 $\frac{dl}{d\theta} = 0$ となる θ の値は、

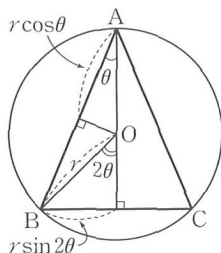
$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{6}$$

ゆえに、 l の増減表は右のようになる。

したがって、 l は $\theta = \frac{\pi}{6}$ で最大となる。

このとき、 $\triangle ABC$ は頂角が $\frac{\pi}{3}$ の二等

辺三角形であるから、正三角形である。 図



θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dl}{d\theta}$		+	0	-	
l		↗	極大 $3\sqrt{3}r$	↘	

6. a は定数とする。曲線 $y = \frac{x}{x^2 + a}$ の変曲点の個数を、次の各場合について求めよ。

(1) $a > 0$

(2) $a = 0$

(3) $a < 0$

指針 曲線の変曲点の個数 $f''(t) = 0$ のとき、 $x = t$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば、点 $(t, f(t))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点である。

y' , y'' の順に求め、 y'' の分子を 0 にする x の値を調べる。

解答

$$y' = \frac{(x^2+a) - x \cdot 2x}{(x^2+a)^2} = \frac{-x^2+a}{(x^2+a)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x(x^2+a)^2 - (-x^2+a) \cdot 2(x^2+a) \cdot 2x}{(x^2+a)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+a) - 4x(-x^2+a)}{(x^2+a)^3} = \frac{2x(x^2-3a)}{(x^2+a)^3}$$

(1) $a > 0$ のとき、 $y'' = 0$ となる x の値は $x = 0, \pm\sqrt{3a}$

すなわち $y'' = \frac{2(x+\sqrt{3a})x(x-\sqrt{3a})}{(x^2+a)^3}$

y'' の分母は常に正であるから、この曲線の凹凸、変曲点は、次の表のようになる。

x		$-\sqrt{3a}$		0		$\sqrt{3a}$	
y''	-	0	+	0	-	0	+
y	上に凸	変曲点	下に凸	変曲点	上に凸	変曲点	下に凸

よって、変曲点は 3 個 答

(2) $a = 0$ のとき $y'' = \frac{2}{x^3}$

$x < 0$ のとき $y'' < 0$, $x > 0$ のとき $y'' > 0$

もとの関数において、 $x = 0$ は定義域に含まれない。

よって、変曲点は 0 個 答

(3) $a < 0$ のとき、 $x^2 - 3a > 0$ であるから、 $y'' = 0$ となる x の値は $x = 0$

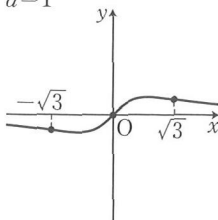
もとの関数の定義域は $x \neq \pm\sqrt{-a}$ であり、 y'' の符号と曲線の凹凸、変曲点は、次の表のようになる。

x		$-\sqrt{-a}$		0		$\sqrt{-a}$	
y''	-	/	+	0	-	/	+
y	上に凸	/	下に凸	変曲点	上に凸	/	下に凸

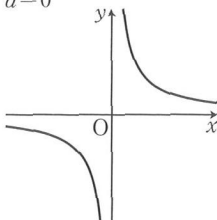
したがって、変曲点は 1 個 答

注意 グラフの概形は図のようになる。点・が変曲点である。

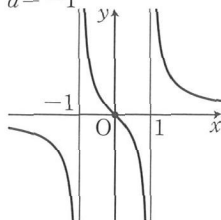
$a = 1$



$a = 0$



$a = -1$



7. $x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$(1) \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$(2) \sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

指針 不等式の証明 (左辺) - (右辺) を $f(x)$ とし、 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ となることを証明する。 $f(x)$ の増減を利用する。

(1) $f'(x)$ の正負は第2次導関数 $f''(x)$ を使って判断するとよい。

(2) (1) の不等式が利用できる。

解答 (1) $f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ とすると

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$$

$f''(x) = 0$ となるのは、 x が 2π の整数倍であるときだけで、他の x については、 $f''(x) > 0$ である。

よって、 $f'(x)$ は増加する。

このことと、 $f'(0) = 0$ から、 $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

ゆえに、 $x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$

したがって、 $x > 0$ のとき $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ **終**

$$(2) g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \text{ とすると } g'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

(1) より、 $x > 0$ のとき $g'(x) > 0$

よって、 $g(x)$ は $x \geq 0$ で増加するから

$x > 0$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ すなわち $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ **終**

第4章 章末問題B

教 p.135

8. 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の原点以外の任意の点 P における法線が x 軸と交わる点を Q とし、 P から x 軸に下ろした垂線を PR とする。このとき、線分 QR の長さは一定であることを示せ。

指針 法線の方程式と証明 点 P の x 座標を t ($t>0$) として、法線の方程式を表し、点 Q の座標を求める。また、 R の座標は $(t, 0)$ である。

解答 点 P の x 座標を t ($t>0$) とすると

$$P(t, \sqrt{t})$$

$$f(x)=\sqrt{x} \text{ とすると}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ から } f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

よって、点 P における法線の方程式は

$$y-\sqrt{t}=-2\sqrt{t}(x-t)$$

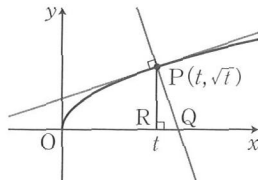
$$\text{すなわち } y=-2\sqrt{t}x+(2t+1)\sqrt{t}$$

ゆえに、点 Q の x 座標は、法線の方程式に $y=0$ を代入して

$$0=-2\sqrt{t}x+(2t+1)\sqrt{t} \text{ より } x=\frac{2t+1}{2}$$

$$\text{また、} R(t, 0) \text{ であるから } QR=OQ-OR=\frac{2t+1}{2}-t=\frac{1}{2}$$

したがって、線分 QR の長さは一定である。 総



教 p.135

9. 2つの曲線 $y=ax^2-\frac{1}{2}$, $y=\log x$ が共有点 P をもち、点 P において共通の接線をもつとき、定数 a の値を求めよ。

指針 共有点で共通接線を持つ条件 2つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が、共有点 $P(p, q)$ で共通の接線をもつ条件は $f(p)=g(p)$, $f'(p)=g'(p)$ となることである。

解答 共有点 P の座標を (p, q) ($p>0$) とすると、点 P は2つの曲線上にあるから

$$q=ap^2-\frac{1}{2}, \quad q=\log p$$

$$\text{よって } ap^2-\frac{1}{2}=\log p \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また、曲線 } y=ax^2-\frac{1}{2} \text{ 上の点 } P \text{ における接線の傾きは、} y'=2ax \text{ より } 2ap$$

$$\text{曲線 } y=\log x \text{ 上の点 } P \text{ における接線の傾きは、} y'=\frac{1}{x} \text{ より } \frac{1}{p}$$

$$\text{接線が一致するから} \quad 2ap = \frac{1}{p} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から} \quad ap^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入して} \quad 0 = \log p \quad \text{すなわち} \quad p = 1$$

$$\text{よって, } \textcircled{2} \text{ から} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

教 p.135

10. 体積が一定である直円柱の表面積を最小にするには、高さと底面の半径の比をどのようにすればよいか。

指針 最大・最小の応用 底面の半径を x として、表面積を x の関数で表すことを考える。体積は一定であるから、これを定数 k で表すと、高さ、さらには表面積は x と k で表される。

表面積が最小となる x の値を調べて、高さ h と x の比を求める。

解答 直円柱の体積を定数 k 、底面の半径を変数 x とすると、高さ h は、 $k = \pi x^2 h$

$$\text{より} \quad h = \frac{k}{\pi x^2}$$

また、直円柱の表面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \pi x^2 \times 2 + 2\pi x \cdot \frac{k}{\pi x^2} = 2\left(\pi x^2 + \frac{k}{x}\right) \quad \leftarrow \text{底面積} \times 2 + \text{側面積}$$

$$\text{よって} \quad S'(x) = 2\left(2\pi x - \frac{k}{x^2}\right) = \frac{2(2\pi x^3 - k)}{x^2}$$

$$x > 0 \text{ において } S'(x) = 0 \text{ となる } x \text{ の値は} \quad x = \sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$$

したがって、 $S(x)$ の増減表は右のようになり、 $S(x)$ は $x = \sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$ で最小となる。

このとき、高さ h と底面の半径 x の比は

このとき、高さ h と底面の半径 x の比は

$$\begin{aligned} h : x &= \frac{k}{\pi x^2} : x = k : \pi x^3 \\ &= k : \left(\pi \cdot \frac{k}{2\pi}\right) = 2 : 1 \quad \text{答} \end{aligned}$$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$	
$S'(x)$		-	0	+
$S(x)$			極小	

教 p.135

11. 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ のグラフを C とし、曲線 C の変曲点を A とする。曲線 C 上に A 以外の任意の点 P をとり、 A に関して P と対称な点を Q とすると、 Q も曲線 C 上にあることを示せ。

指針 3 次関数のグラフと変曲点 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフには、変曲点 A に関して対称であるという特徴がある。上の問題文はそれを表現している。

$y=f(x)$ のグラフが変曲点 A に関して対称であることを直接証明しようとすると、計算が煩雑になる。そこで、点 A が原点 O に重なるように平行移動させたグラフの式を $y=g(x)$ として、それが原点に関して対称であることを示す。 $g(-x)=-g(x)$ が成り立つことをいえばよい。

解答 曲線 C が変曲点 A に関して対称であることを示せばよい。

$$f'(x)=3x^2+6ax+3b, \quad f''(x)=6x+6a$$

$$f''(x)=0 \text{ とすると } x=-a$$

曲線 $y=f(x)$ の凹凸は下の表のようになる。

x		$-a$	
y''	—	0	+
y	上に凸	$2a^3-3ab+c$	下に凸

よって、変曲点 A の座標は $(-a, 2a^3-3ab+c)$

曲線 $y=f(x)$ を、点 A が原点に重なるように

x 軸方向に a , y 軸方向に $-2a^3+3ab-c$

だけ平行移動すると、その曲線の方程式は

$$y-(-2a^3+3ab-c)$$

$$=(x-a)^3+3a(x-a)^2+3b(x-a)+c$$

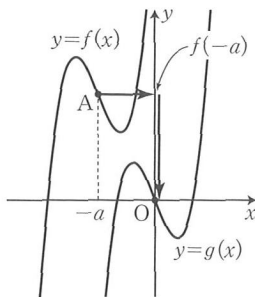
これを整理すると $y=x^3+3(b-a^2)x$

ここで、 $g(x)=x^3+3(b-a^2)x$ とすると

$$g(-x)=(-x)^3+3(b-a^2)(-x)=-\{x^3+3(b-a^2)x\}$$

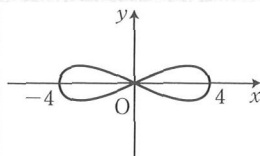
よって、 $g(-x)=-g(x)$ が成り立つから、曲線 $y=g(x)$ は原点に関して対称である。

したがって、もとの曲線 C は変曲点 A に関して対称であるから、点 A に関して点 P と対称な点 Q もこの曲線上にある。 図



教 p.135

12. 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標が、 $x=4\cos t$, $y=\sin 2t$ で与えられるとき、 $0 \leq t \leq 2\pi$ における P の速さの最大値、最小値を求めよ。



指針 平面上の点の運動の速さ 速度のベクトルの成分は、 x 座標、 y 座標をそれぞれ t で微分して得られる。速さはそのベクトルの大きさである。ここでは、最大、最小は三角関数の基本性質で調べられる。

解答 $\frac{dx}{dt} = -4\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ であるから、速さは

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(-4\sin t)^2 + (2\cos 2t)^2} \\ &= \sqrt{4\{4\sin^2 t + (1-2\sin^2 t)^2\}} = 2\sqrt{1+4\sin^4 t} \end{aligned}$$

よって、 $0 \leq t \leq 2\pi$ において

$$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ で最大値 } 2\sqrt{5},$$

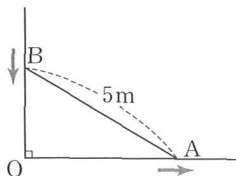
$t = 0, \pi, 2\pi$ で最小値 2 をとる。 答

← $\sin t = \pm 1$ のとき

← $\sin t = 0$ のとき

教 p.135

13. 地面に垂直な壁に長さ 5 m の棒を立てかけ、この棒の下端 A を、地面上を速さ 0.3 m/s で壁から垂直に遠ざける。棒の下端 A が壁から 4 m 離れたときに、棒の上端 B が壁面上を動く速さを求めよ。



指針 直線上の点の運動の速さ 座標平面上で、点 A を x 軸上、点 B を y 軸上にとり、 $OA=x$, $OB=y$ とする。 x , y の間には $x^2+y^2=5^2$ の関係がある。 x , y を時刻 t の関数とみて両辺を t で微分して、 $\left|\frac{dy}{dt}\right|$ を求める。

解答 図のように、点 O を座標平面の原点とし、直線 OA を x 軸、直線 OB を y 軸とする。

$OA=x$, $OB=y$ とおくと、三平方の定理により

$$x^2+y^2=5^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって、 $x=4$ のとき $y=3$

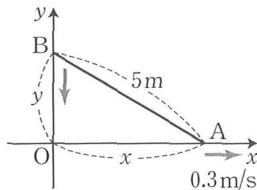
x , y は時刻 t の関数であるから、 $\textcircled{1}$ の両辺を t

で微分して 2 で割ると $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$

これに $\frac{dx}{dt}=0.3$, $x=4$, $y=3$ を代入すると

$$4 \cdot 0.3 + 3 \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{dy}{dt} = -0.4$$

したがって、棒の上端 B の速さは 0.4 m/s 答



コラム e^x を表す式

まとめ

 e^x を表す式 e^x は次のような無限級数で表されることが知られている。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad ①$$

このことから、 $x > 0$ のとき

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \quad ②$$

が成り立つ。

教 p.136

練習

$x > 0$ のとき、上の ② の不等式を数学的帰納法を用いて証明しよう。
また、② の不等式を用いて $e > 2.7$ であることを確かめよう。

解答 【② の不等式の証明】

[1] $n=1$ のとき

$$f(x) = e^x - (1+x) \text{ とすると } f'(x) = e^x - 1$$

$$x > 0 \text{ のとき, } e^x > 1 \text{ であるから } f'(x) > 0$$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

$$\text{ゆえに, } x > 0 \text{ のとき } f(x) > f(0) = 0$$

$$\text{したがって, } x > 0 \text{ のとき } e^x > 1+x$$

よって、 $n=1$ のとき ② が成り立つ。[2] $n=k$ のとき ② が成り立つ、すなわち、 $x > 0$ のとき

$$e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right) > 0$$

が成り立つと仮定する。

 $n=k+1$ のときの ② の両辺の差を $f(x)$ とすると

$$f(x) = e^x - \left\{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}\right\}$$

であるから、 $x > 0$ のとき

$$f'(x) = e^x - \left\{0 + 1 + \frac{2}{2!}x + \frac{3}{3!}x^2 + \cdots + \frac{k+1}{(k+1)!}x^k\right\}$$

$$= e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right) > 0$$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

$$\text{ゆえに, } x > 0 \text{ のとき } f(x) > f(0) = 0$$

したがって、 $n=k+1$ のときも ② が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ② が成り立つ。 終

【 $e > 2.7$ であること】

② において、 $n=4$ とすると

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

この不等式に $x=1$ を代入して

$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} = 2.708\cdots > 2.7 \quad \text{終}$$

4 章

微分法の応用